State-like モナドは小さい圏により表現できる

2024-07-23 Koji Miyazato vierсc@gmail.com

目次

第 1 章　はじめに

多項式関手は、関手のなかでも扱いやすい性質をもちながら、多種の重要な例を含む関手のクラスである。特に、集合圏 **Set** 上の多項式関手と多項式関手の間の自然変換は、その定義を具体的に書き下すことが可能であり、種々の計算を実際に行うことができながら、計算機科学、特に関数型プログラミングにおいて重要な応用をもつ。

Set 上の多項式関手に対する追加の構造を加えたものもまた、その定義を具体的に書き下すことができる。例えば、多項式関手 $F(-) = \sum_{s \in S} (P(s) \to -)$ の上に定義されるモナドやコモナドは、集合 I と集合族 P に対するいくつかの演算とそれらが満たすべき等式によって、純粋に組み合わせ論的に定義することができる。[1]

このように組み合わせ論的に見ることで、**Set** 上の多項式コモナド（多項式関手でもあるコモナド）は、小さい圏と同型を除いて 1 対 1 に対応することがわかっている。[2–3] *1一方で、**Set** 上の多項式関手でもあるモナドについては、それに類似するような、直接的定義よりも簡潔な表現というものは得られていない。

しかし、ごく一部のクラスの多項式関手ならば、その上のモナドの構造はたやすく把握できる。例えば、表現可能関手

$$R(-) = (A \to -) : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$$

上に定義できるモナド構造はただ一つであり、関数型プログラミングの分野では `Reader` モナドと呼ばれているものに限られる。また別の例には、

$$W(-) = M \times - : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$$

という形の関手上に定義できるモナド構造は、集合 M 上のモノイドと 1 対 1 に対応し、関数型プログラミングの分野では `Writer` モナドとしてよく知られている。

より広いクラスの多項式関手におけるモナド構造についての先行研究には、polynomial monad *2についてのものがある。[4] しかし、cartesian でない多項式モナドの組み合わせ論的な記述については、未だ詳細なことがわかっていない。（TODO 本当に？）

---

1 この対応は多項式コモナドの圏と小さい圏の圏の間の圏同値ではない。多項式コモナドの間の射に対して、それが誘導する小さい圏の間の射は関手ではなく cofunctor とよばれるものになっている。[3]

2 先行研究に倣い、polynomial monad とは多項式関手を台とする cartesian monad のことを指す。本文書で考察対象となるのは多項式関手を台とする cartesian とは限らないモナドであり、そのようなモナドのクラスを polynomial monad と呼ぶことはできない。本文書では、混乱を避けるため、日本語で多項式モナドという表現も用いない。

この文書では、多項式関手上のモナド構造からなるクラスとして関数型プログラミングで用いられる `State` モナドや `Writer` モナドを包含する state-like モナドを定義し、state-like モナドは多項式コモナドと同じように小さい圏 C によって表現できることを示す。

特に、何らかの集合 M, I を用いて $M \times (I \to -)$ と同型な $\mathbf{Set}$ 上の自己関手を台とするモナドを前 state-like モナドと定義し、state-like モナドを追加の条件を満たす前 state-like モナドとして定義する。

本文書は以下の構成をとる。第 2 章において表記法の準備をした後、第 3 章において前 state-like モナドと state-like モナドを定義し、その性質を示す。続いて第 4 章において小さい圏 C が与えられたときに state-like モナド $\mathrm{Flow}(C)$ を構成する方法 Flow を定義し、任意の state-like モナドが、ある小さい圏 C を用いて $\mathrm{Flow}(C)$ と表現できることを示す。最後に第 5 章において、前 state-like モナドにおいて「状態の数」、$M \times (I \to -)$ における I の濃度、が有限であるようなものは、必ず state-like モナドになっていることを示す。

第 2 章　表記法の準備

この文書では、集合 I を定義域とする関数の集合 $I \to S$ は、I で添字付けられた集合族の積 $\prod_{i \in I} S_i$ の特別な場合とみなす。これらの集合の元を数式中で記述する場合、どちらにも $\lambda i.(...)$ という記法を用いる。

この文書では、関数の f のある点 x における値や積の元 $f \in \prod_{x \in I} S_x$ に対する x 番目の射影を並置によって fx と書き、必ずしも $f(x)$ とは書かない。ただし、n 個組 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ への関数適用 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ や、単なる式のグループ化としての $f(\text{長い式})$ という形では $f(...)$ という式は現れうる。並置による関数適用は左結合であるとする。すなわち、$fxyz$ は $((fx)y)z$ と解釈する。

集合 S のある元 s に対して、$\overline{s}$ という表記で、定数関数 $(\lambda i.s) \in I \to S$ を表す。定義域の集合 I は省略し、文脈から判断するものとする。

小さい圏 C に対して、その対象の集合を $\mathrm{Ob}(C)$、射の集合を $\mathrm{Mor}(C)$ と書く。圏 C のホムセットを $C[a, b]$ と書く。また、各ホムセットは互いに共通部分を持たないものとする。すなわち、

$$\mathrm{Mor}(C) = \sum_{(a,b) \in \mathrm{Ob}(C) \times \mathrm{Ob}(C)} C[a, b] \tag{1}$$

を仮定する。これによって、どのホムセットに属するか不明な射 $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に対してそ

の始域および終域を与える関数 $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}$ が定義できる。

定義 2.1

$$\begin{aligned} \mathrm{dom} &: \mathrm{Mor}(C) \to \mathrm{Ob}(C) \\ \mathrm{dom}\, f = a &\qquad \text{iff} \quad f \in C[a,b] \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{cod} &: \mathrm{Mor}(C) \to \mathrm{Ob}(C) \\ \mathrm{cod}\, f = b &\qquad \text{iff} \quad f \in C[a,b] \end{aligned} \tag{3}$$

定義 2.2　$C[a]$ を、C の射のうち始域が a であるものを集めた集合と定義する。すなわち、

$$C[a] := \sum_b C[a,b] \tag{4}$$

である。

第 3 章　State-like モナド

1. 前 state-like モナド

$\mathbf{Set}$ 上のモナド T が前 state-like モナドであることを、その台となる関手がある集合 M と I を用いて $M \times (I \to -)$ という形である、あるいはそれらと同型であることと定義する。

定義 3.3　集合 M と I に対して、$\mathrm{St}(M,I)$ を $\mathbf{Set}$ 上の自己関手

$$\mathrm{St}(M,I)(-) := M \times (I \to -) \tag{5}$$

とする。

定義 3.4　$\mathbf{Set}$ 上のモナド $T = (F, \eta, \mu)$ が**前 state-like モナド**であることを、モナドの台となる関手 F がある集合 M と I を用いて $\mathrm{St}(M,I)$ と同型であることと定義する。

`Reader` モナドや `State` モナドは、前 state-like モナドの例となっている。

例 3.5　`Reader` モナドを、ある集合 I に対して関手 $F(-) = I \to -$ を台とし、以下の η, μ によって与えられたモナド構造をもつモナド (F, η, μ) とする。

$$\begin{aligned} \eta_a &: a \to F(a) \\ \eta_a x &= \overline{a} \\ \mu_a &: F(F(a)) \to F(a) \\ \mu_a x &= \lambda(i : I).xii \end{aligned} \tag{6}$$

F は $\mathrm{St}(\{\star\}, I)(-) = \{\star\} \times (I \to -)$ に同型であり、`Reader` モナドは前 state-like モナドである。

例 **3.6**　`State` モナドを、ある集合 S に対して関手 $F(-) = S \to (S \times -)$ を台とし、以下の η, μ によって与えられたモナド構造をもつモナド (F, η, μ) とする。

$$\begin{aligned} \eta_a &: a \to F(a) \\ \eta_a x &= \lambda(s : S).(s, a) \\ \mu_a &: F(F(a)) \to F(a) \\ \mu_a x &= \lambda(s : S). \\ &\quad\ \textbf{let}\ \ (s', x') = xs\ \ \textbf{in}\ \ x's' \end{aligned} \tag{7}$$

F は以下の通り $\mathrm{St}(S \to S, S)$ に同型であるから、`State` モナドは前 state-like モナドである。

$$\begin{aligned} F(-) &= S \to (S \times -) \\ &\sim (S \to S) \times (S \to -) \\ &= \mathrm{St}(S \to S, S) \end{aligned} \tag{8}$$

定義 3.7 (前 state-like モナドの状態の数と状態遷移の数).　前 state-like モナド T に同型なモナド $(\mathrm{St}(M, I), \eta, \mu)$ を適当に選ぶとき、M や I の濃度は同型なモナドの選択によらない。T の**状態の数**を I の濃度、T の**状態遷移の数**を M の濃度と定義する。

前 state-like モナド $(\mathrm{St}(M, I), \eta, \mu)$ は、M と I 上の関数を用いた明示的な表現を持つ。

定理 3.8 (前 state-like モナドの表示 $(M, I, e, \bullet, \nwarrow, \nearrow)$ [1]).　関手 $\mathrm{St}(M, I)$ を F とおく。自然変換 $\eta : \mathrm{Id} \to F$ は、等式

$$\eta(x) = (e, \overline{x}) \tag{9}$$

によって M の元 e と 1 対 1 に対応し、自然変換 $\mu : F^2 \to F$ は

$$\mu(m, f) = (m \bullet v, \lambda i. f'(v \nwarrow_m i)(i \nearrow_m v)) \tag{10}$$
$$\begin{aligned} \textbf{where} \quad v &= \pi_1 \circ f : I \to M \\ f' &= \pi_2 \circ f : I \to I \to M \end{aligned}$$

によって、3 つ組

$$\begin{cases} (- \bullet -) & : M \times (I \to M) \to M \\ (- \nwarrow_{(-)} -) & : (I \to M) \times M \times I \to I \\ (- \nearrow_{(-)} -) & : I \times M \times (I \to M) \to I \end{cases}$$

と 1 対 1 に対応する。更に、自然変換の組 (η, μ) がモナド則を満たしモナド (F, η, μ) を構成することと、(η, μ) を規定する組 $(e, \bullet, \nwarrow, \nearrow)$ が以下の等式 (Law1)-(Law8) を満たすことは同値である。

$$m \bullet \overline{e} = m \tag{Law1}$$
$$e \bullet \overline{m} = m \tag{Law2}$$
$$(m \bullet v) \bullet w' = m \bullet u \tag{Law3}$$
$$\overline{e} \nwarrow_m i = i \tag{Law4}$$
$$i \nearrow_e \overline{m} = i \tag{Law5}$$
$$v \nwarrow_m (w' \nwarrow_{m \bullet v} i) = u \nwarrow_m i \tag{Law6}$$
$$(w' \nwarrow_{m \bullet v} i) \nearrow_m v = w(u \nwarrow_m i) \nwarrow_{v(u \nwarrow_m i)} (i \nearrow_m u) \tag{Law7}$$
$$i \nearrow_{m \bullet v} w' = (i \nearrow_m u) \nearrow_{v(u \nwarrow_m i)} w(u \nwarrow_m i) \tag{Law8}$$
$$\begin{aligned} \textbf{where} \quad w' &= \lambda k. w(v \nwarrow_m k)(k \nearrow_m v) \\ u &= \lambda k. v(k) \bullet w(k) \end{aligned}$$

ただし変数 i, m, v, w は以下の範囲を動く。

$$\begin{aligned} &i \in I, && m \in M, \\ &v \in I \to M, && w \in I \to I \to M \end{aligned}$$

定義 3.9　前 state-like モナド $T = (\mathrm{St}(M, I), \eta, \mu)$ の表示とは、6 つ組 $(M, I, e, \bullet, \nwarrow, \nearrow)$ であって、モナド T と定理3.8の方法で対応しているもの、すなわち式 (Law1)-(Law8) をすべて満たすようなものである。

以下、前 state-like モナド T の表示 $(M, I, e, \bullet, \nwarrow, \nearrow)$ といった場合には、暗黙に (η, μ) を上記の方法で定義されているものとして扱う。

前 state-like モナド T の表示 $(M, I, e, \bullet, \nwarrow, \nearrow)$ に関して、いくつかの補題を準備する。

補題 3.10　任意の $w \in I \to I \to M$ に対して、

$$e \bullet \lambda i.e \bullet \lambda j.wij = e \bullet \lambda i.wii \tag{11}$$

Proof.

$$\begin{aligned} e \bullet \lambda i.e \bullet \lambda j.wij &= (e \bullet \overline{e}) \bullet \lambda j.w(\overline{e} \nwarrow_e j)(j \nearrow_e \overline{e}) \\ &= e \bullet \lambda j.wjj \end{aligned}$$

■

定義 3.11　任意の $i \in I$ について、$i = j$ のときだけ $\alpha_i mj = m$ となり、それ以外のときに e となる関数を $\alpha_i : M \to I \to M$ とおく。

$$\alpha_i m = \lambda j.\mathbf{if}\ \ i = j\ \ \mathbf{then}\ \ m\ \ \mathbf{else}\ \ e \tag{12}$$

α_i とは逆に、$i = j$ のときだけ $\beta_i m(j) = e$ となり、それ以外のときに $\beta_i m(j) = m$ となる関数を $\beta_i : M \to I \to M$ とおく。

$$\beta_i m = \lambda j.\mathbf{if}\ \ i = j\ \ \mathbf{then}\ \ e\ \ \mathbf{else}\ \ m \tag{13}$$

定義 3.12 (M の射影).　モナド $(\mathrm{St}(M, I), \eta, \mu)$ に対して、I の要素 i で添字付けられた関数の族 $p_i : M \to M$ を以下のように定義する。

$$p_i m = e \bullet \alpha_i m \tag{14}$$

また、M_i を各関数 p_i の値域と定義する。

$$M_i = \left\{ p_i m \;\middle|\; m \in M \right\} \tag{15}$$

定理 3.13 (p_i の直交射影性).　関数の族 p_i は以下の性質をもつ。

$$p_i(p_j m) = \begin{cases} p_i m & \text{if } i = j \\ e & \text{otherwise} \end{cases} \tag{16}$$

Proof.　付録 Aにて行う。 ■

定理 3.14 (M は M_i の直積).　$m \in M$ に対して、すべての $i \in I$ における m の射影 $p_i m$ の組への写像

$$dm = \lambda i.p_i m \tag{17}$$

は、$v \in \prod_{i \in I} M_i$ に対してこれをモナド演算で結合して M の元を与える写像 $c = (e \bullet -)$ の逆写像であり、M と $\prod_{i \in I} M_i$ の間の全単射を与えている。

Proof. 任意の $m \in M$ に対して、

$$
\begin{aligned}
c(d(m)) &= e \bullet \lambda i.p_i m && (18)\\
&= e \bullet \lambda i.e \bullet \lambda j.\alpha_i mj && (19)\\
&= e \bullet \lambda i.\alpha_i mi && (20)\\
&= e \bullet \overline{m} && (21)\\
&= m && (22)
\end{aligned}
$$

より $c \circ d = \mathrm{id}$。また、任意の $v \in \prod_i M_i$ に対して、

$$
\begin{aligned}
d(c(v)) &= \lambda i.p_i(e \bullet v) && (23)\\
&= \lambda i.e \bullet \alpha_i(e \bullet v) && (24)\\
&= \lambda i.e \bullet \lambda j.\mathbf{if}\ \ i = j\ \ \mathbf{then}\ \ e \bullet v\ \ \mathbf{else}\ \ e && (25)\\
&= \lambda i.e \bullet \lambda j.\mathbf{if}\ \ i = j\ \ \mathbf{then}\ \ e \bullet v\ \ \mathbf{else}\ \ e \bullet \overline{e} && (26)\\
&= \lambda i.e \bullet \lambda j.e \bullet \lambda k.\mathbf{if}\ \ i = j\ \ \mathbf{then}\ \ vk\ \ \mathbf{else}\ \ e && (27)\\
&= \lambda i.e \bullet \lambda j.\mathbf{if}\ \ i = j\ \ \mathbf{then}\ \ vj\ \ \mathbf{else}\ \ e && (28)\\
&= \lambda i.e \bullet \lambda j.\mathbf{if}\ \ i = j\ \ \mathbf{then}\ \ vi\ \ \mathbf{else}\ \ e && (29)\\
&= \lambda i.p_i(vi) && (30)\\
&= \lambda i.vi && (31)\\
&= v && (32)
\end{aligned}
$$

より $d \circ c = \mathrm{id}$。したがって c, d は互いに逆写像である。 ■

補題 3.15 ($\nwarrow_e$ は M_i の直積だけで決まる). 任意の $v : I \to M$ と $i : I$ に対して、$v' = \left(\lambda j.p_j(vj)\right) \in \prod_i M_i$ とおく。このとき以下が成り立つ。

$$v \nwarrow_e i = v' \nwarrow_e i \tag{33}$$

Proof. 定理3.8の (Law6) より、次式が成り立つ。

$$\overline{e} \nwarrow_e \left(v' \nwarrow_{e\bullet\overline{e}} i\right) = u \nwarrow_e i \tag{34}$$
$$\begin{aligned} \textbf{where}\quad & wjk = p_k(vj) \\ & v'j = w(\overline{e} \nwarrow_e j)(\overline{e} \nearrow_e j) \\ & uj = e \bullet wj \end{aligned}$$

ここで (Law4), (Law5) を用いると、

$$v' \nwarrow_e i = u \nwarrow_e i \tag{35}$$
$$\begin{aligned} \textbf{where}\quad & wjk = p_k(v(j)) \\ & v'j = wjj = p_j(vj) \\ & uj = e \bullet wj \end{aligned}$$

である。定理3.14から

$$uj = e \bullet wj = e \bullet (\lambda k.p_k(vj)) = vj \tag{36}$$

であるから、証明すべき等式

$$v' \nwarrow_e i = v \nwarrow_e i \tag{37}$$
$$\textbf{where}\quad v'j = p_j(vj)$$

を得る。 ■

2. State-like モナド

前 state-like モナドのうち追加の条件を満たすものとして、state-like モナドを次のように定義する。

定義 3.16 (State-like モナド). 前 state-like モナド $T = (T, \eta^T, \mu^T)$ が **state-like モナド**であることを、T と同型なモナド $(\mathrm{St}(M, I), \eta, \mu)$ が以下の条件を満たすことと定義する。

- $(\mathrm{St}(M, I), \eta, \mu)$ の表示を $(M, I, e, \bullet, \nwarrow, \nearrow)$ としたとき、任意の $v : I \to M$ に対して関数 $\left(v \nwarrow_e -\right) : I \to I$ が全単射である

State-like モナドの同型類の中から、計算が簡単になるようなものを選ぶことができる。

定義 3.17 (State-like モナドの標準表示). State-like モナドの表示 $(M, I, e, \bullet, \nwarrow, \nearrow)$ が標準表示であることを、任意の $m \in M, v \in I \to M, i \in I$ に対して

$$v \nwarrow_m i = i \tag{38}$$

を満たすことと定義する。

補題 3.18　State-like モナドの表示 $(M, I, e, \bullet, \nwarrow, \nearrow)$ が任意の $v \in I \to M, i \in I$ に対して

$$v \nwarrow_e i = i \tag{39}$$

を満たすならば、任意の m に対しても式 (38) を満たし、この表示は標準表示である。

Proof.　任意の $m' : M$ と $v' : I \to M$ に対して $m := e, vk := p_k m', wk := \overline{v'k}$ を式 (Law6) に代入すると、

$$\begin{aligned} & v \nwarrow_e (w' \nwarrow_{e \bullet v} i) = u \nwarrow_e i = i \\ & \quad \textbf{where} \;\; w'k = v'(v \nwarrow_e k) = v'k \\ & \qquad\qquad\quad uk = vk \bullet wk \\ & \qquad\qquad\quad e \bullet v = e \bullet \lambda k.p_k m' = m' \end{aligned} \tag{40}$$

より $v' \nwarrow_{m'} i = i$ が成り立つ。したがって、$(M, I, e, \bullet, \nwarrow, \nearrow)$ は標準表示である。 ■

補題 3.19　State-like モナド $T = (\mathrm{St}(M, I), \eta, \mu)$ の表示 $(M, I, e, \bullet, \nwarrow, \nearrow)$ に対して、T と同型な state-like モナド $T' = (\mathrm{St}(M, I), \eta, \mu')$ であって、標準表示 $(M, I, e, \bullet', \nwarrow', \nearrow')$ を持つものが存在する。

Proof.　関手 $\mathrm{St}(M, I)$ から自身への自然同型 τ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} & \tau_a : \mathrm{St}(M, I)(a) \to \mathrm{St}(M, I)(a) \\ & \tau_a(m, f) = (m, f \circ \sigma_m^{-1}) \\ & \quad \textbf{where} \;\; \sigma_m i = (\lambda j.p_j m) \nwarrow_e i \end{aligned} \tag{41}$$

この τ はモナドの単位 η を変化させない、すなわち、$\tau \circ \eta = \eta$ を満たす。τ がモナド T から T' への同型にもなるように、以下のように μ' を定める。

$$\mu' = \tau \circ \mu \circ \tau^{-1} \circ T\tau^{-1} \tag{42}$$

μ' を式 (10) と同様に $(\bullet', \nwarrow', \nearrow')$ で表すと、

$$\mu'_a(m, \lambda i.(vi, \lambda j.fij)) = \Big(m \bullet' v, \lambda i.f\big(v \nwarrow'_m i\big)\big(i \nearrow'_m v\big)\Big) \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \textbf{where}\ \ & m \bullet' v = m \bullet (v \circ \sigma_m) \\ & v \nwarrow'_m i = (v \circ \sigma_m) \nwarrow_m (\sigma^{-1}_{m \bullet' v} i) \\ & i \nearrow'_m v = \textbf{let}\ \ i' = \sigma^{-1}_{m \bullet' v} i \\ & \qquad\qquad \textbf{in}\ \ (\sigma_{v(i')} i') \nearrow_m (v \circ \sigma_m) \end{aligned}$$

である。$\nwarrow'$ に対して、$m = e$ の場合を $\sigma_e = \overline{e} \nwarrow_e - =$ id を用いて計算すると、

$$v \nwarrow'_e i = (v \circ \sigma_e) \nwarrow_e \sigma^{-1}_{e \bullet' v} i \tag{44}$$

$$= v \nwarrow_e \sigma^{-1}_{e \bullet (v \circ \sigma_e)} i \tag{45}$$

$$= v \nwarrow_e \sigma^{-1}_{e \bullet v} i \tag{46}$$

である。補題3.15より $v \nwarrow_e i = (\lambda j.p_j(vj)) \nwarrow_e i$ であるから、

$$\ldots = v' \nwarrow_e \sigma^{-1}_{e \bullet v} i \tag{47}$$

$$\textbf{where}\ \ v' j = p_j(vj)$$

$$= v' \nwarrow_e \sigma^{-1}_{e \bullet v}(i) \tag{48}$$

$$= \sigma_{e \bullet v'}(\sigma^{-1}_{e \bullet v} i) \tag{49}$$

$$= \sigma_{e \bullet v'}(\sigma^{-1}_{e \bullet v'} i) \tag{50}$$

$$= i \tag{51}$$

すなわち $v \nwarrow'_e i = i$ となる。よって、補題3.18より $(M, I, e, \bullet', \nwarrow', \nearrow')$ は標準表示である。 ■

State-like モナドの標準表示 $(M, I, e, \bullet, \nwarrow, \nearrow)$ については、それらが満たす等式 (Law1)-(Law8) を大幅に単純化することができる。実際に $v \nwarrow_m i = i$ を代入すると以下のようになる。

$$m \bullet \overline{e} = m \tag{Law1'}$$

$$e \bullet \overline{m} = m \tag{Law2'}$$

$$(m \bullet v) \bullet w' = m \bullet u \tag{Law3'}$$

$$i = i \tag{Law4'}$$

$$i \nearrow_e \overline{m} = i \tag{Law5'}$$

$$i = i \tag{Law6'}$$

$$i \nearrow_m v = i \nearrow_m u \tag{Law7'}$$

$$i \nearrow_{m \bullet v} w' = (i \nearrow_m u) \nearrow_{vi} wi \tag{Law8'}$$
$$\textbf{where} \quad w' = \lambda k.wk(k \nearrow_m v)$$
$$u = \lambda k.vk \bullet wk$$

ここで (Law7') において $v := \overline{e}, wj := \overline{v'j}$ を代入すると、

$$i \nearrow_m \overline{e} = i \nearrow_m (\lambda j.e \bullet \overline{v'j}) \tag{52}$$
$$= i \nearrow_m v' \tag{53}$$

となる。すなわち、任意の v' に対して $i \nearrow_m v'$ は v' によらない。よって (Law7') を以下のように表現することができる。

$$i \nearrow_m v = t(i, m) \qquad \text{for some } t : I \times M \to I \tag{54}$$

これにより (Law8') も次式に置き換えることができる。

$$t(i, m \bullet v) = t(t(i, m), vi) \tag{55}$$

結果的に、等式も含めた state-like モナドの標準表示は、$(I, M, e, \bullet, t)$ という 5 つ組を用いて表すことができる。

定義 3.20 (state-like モナドの単純化した標準表示). State-like モナドの単純化した標準表示は、5 つ組 $(M, I, e, \bullet, t)$ であって、以下の 5 つの等式を満たすものである。

$$m \bullet \overline{e} = m \tag{Law1''}$$
$$e \bullet \overline{m} = m \tag{Law2''}$$
$$(m \bullet v) \bullet (\lambda k.wk(t(k, m))) = m \bullet (\lambda k.vk \bullet wk) \tag{Law3''}$$
$$t(i, e) = i \tag{Law5''}$$
$$t(i, m \bullet v) = t(t(i, m), vi) \tag{Law8''}$$

補題 3.21 State-like モナドの単純化した標準表示 $(M, I, e, \bullet, t)$ が与えられたとき、

$$v \nwarrow_m i = i \tag{56}$$
$$i \nearrow_m v = t(i, m) \tag{57}$$

と定義すると、$(M, I, e, \bullet, \nwarrow, \nearrow)$ は state-like モナド $(\mathrm{St}(M, I), \eta, \mu)$ の表示である。ここで、η, μ は以下のように定義される。

$$\eta_a x = (e, x) \tag{58}$$

$$\mu_a(m, \lambda i.(vi, fi)) = (m \bullet v, \lambda i.fi(t(i,m))) \tag{59}$$

単純化した標準表示においては、$\bullet$ にもほとんど自由度がない。ごく限られたパターンの m, v に対する $m \bullet v$ から、すべての定義域における $\bullet$ が決定される。

補題 3.22 State-like モナドの単純化した標準表示 $(M, I, e, \bullet, t)$ において、任意の $i \in I$, $m \in M$, $v \in I \to M$ に対して以下が成り立つ。

$$p_i(m \bullet v) = p_i m \bullet \alpha_i(p_j(vi)) \tag{60}$$
$$\textbf{where} \quad j = t(i, p_i m)$$

Proof.

$$\begin{aligned}
p_i(m \bullet v) &= e \bullet \alpha_i(m \bullet v) && (61)\\
&= e \bullet \lambda k.\alpha_i mk \bullet (\textbf{if} \;\; i = k \;\; \textbf{then} \;\; v \;\; \textbf{else} \;\; \overline{e}) && (62)\\
&= (e \bullet \alpha_i m) \bullet \lambda k.(\textbf{if} \;\; i = k \;\; \textbf{then} \;\; v \;\; \textbf{else} \;\; \overline{e})(t(k,e)) && (63)\\
&= p_i m \bullet \lambda k.(\textbf{if} \;\; i = k \;\; \textbf{then} \;\; v \;\; \textbf{else} \;\; \overline{e})(k) && (64)\\
&\quad \textbf{where} \;\; m_i = p_i m\\
&= m_i \bullet \alpha_i(vi) && (65)\\
&= m_i \bullet \lambda k.e \bullet (\lambda l.p_l(\alpha_i(vi)k)) && (66)\\
&= (m_i \bullet \overline{e}) \bullet \lambda k.p_{t(k,m_i)}(\alpha_i(vi)k) && (67)\\
&= (m_i \bullet \overline{e}) \bullet \lambda k.\textbf{if} \;\; i = k \;\; \textbf{then} \;\; p_{t(k,m_i)}(vi) \;\; \textbf{else} \;\; p_j e && (68)\\
&= m_i \bullet \alpha_i(p_{t(i,m_i)}(vi)) && (69)\\
&= m_i \bullet \alpha_i(p_j(vi)) && (70)\\
&\quad \textbf{where} \;\; j = t(i, m_i)
\end{aligned}$$

■

系 3.23 任意の $i \in I, m_i \in M_i, m_j \in M_j$ に対して、$j = t(i, m_i)$ ならば $m_i \bullet \alpha_i m_j \in M_i$ である。

補題 3.24 State-like モナドの単純化した標準表示 $(I, M, e, \bullet, t)$ において、任意の $m \in M$, $v \in I \to M$ に対して

$$m \bullet v = e \bullet \lambda i.p_i m \bullet \alpha_i(p_{t(i,m_i)}(vi)) \tag{71}$$

Proof. 定理3.14において $m := m \bullet v$ とし、補題3.22を用いればよい。 ■

State-like モナドの間のモナド準同型もまた、簡潔な表現をもつ。

定理 3.25 (State-like モナドの間の準同型). 2 つの State-like モナド $T = (\mathrm{St}(M,I),\eta,\mu)$ と $T' = (\mathrm{St}(M',I'),\eta',\mu')$ が、それぞれ $(M,I,e,\bullet,t)$ および $(M',I',e',\bullet',t')$ という単純化された標準表示を持つとする。このとき、関数 $g : I' \to I$ と関数の族 $h_{i'} : M_{gi'} \to M'_{i'}$ が式 (72)-(74) を満たすならば、式 (75) によって定義される自然変換 τ はモナド準同型である。

$$h_{i'}e = e' \tag{72}$$

$$\begin{aligned} g(t'(i',h_{i'}m_i)) &= t(i,m_i) \\ \textbf{where}\ \ i &= gi' \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned} h_{i'}(m_i \bullet \alpha_i m_j) &= h_{i'}m_i \bullet' \alpha_{i'}h_{j'}m_j \\ \textbf{where}\ \ j' &= t'(i',h_{j'}m_i) \\ i &= gi' \\ j &= gj' = t(i,m_i) \end{aligned} \tag{74}$$

$$\tau(m,f) = (e' \bullet \lambda i'.h_{i'}(p_{gi'}m), f \circ g) \tag{75}$$

Proof. 省略する。 ■

この逆も成立する。すなわち、任意のモナド準同型は式 (75) によって記述できる。

定理 3.26 (State-like モナドの間の準同型の表現). 2 つの State-like モナド $T = (\mathrm{St}(M,I),\eta,\mu)$ と $T' = (\mathrm{St}(M',I'),\eta',\mu')$ が、それぞれ $(M,I,e,\bullet,t)$ および $(M',I',e',\bullet',t')$ という単純化された標準表示を持つとき、それらの間の任意のモナド準同型 $\tau : T \to T'$ は、ある関数 g と関数族 $h_{i'}$ であって式 (72)-(74) を満たすようなものを用いて、式 (75) で定義されるものに等しい。

Proof. 付録 Aにて示す。 ■

第 4 章　Flow モナド

1. モナド $\mathrm{Flow}(C)$

小さい圏 C に対して、$\mathbf{Set}$ 上のモナド $\mathrm{Flow}(C)$ を以下のように定義する。

定義 4.27 (Flow). C を小さい圏とする。$\mathrm{Flow}(C)$ を、$\mathbf{Set}$ 上の自己関手

$$F_C(-) := \prod_{i \in \mathrm{Ob}(C)} (C[i] \times -) \tag{76}$$

を台とする **Set** 上のモナド $(F_C, \eta^{\mathrm{Flow}}, \mu^{\mathrm{Flow}})$ と定義する。 ここで、$\mathrm{Flow}(C)$ のモナド演算 $\eta^{\mathrm{Flow}}, \mu^{\mathrm{Flow}}$ は

$$\begin{aligned} \eta^{\mathrm{Flow}}_a &: a \to F_C a \\ \eta^{\mathrm{Flow}}_a x &= \lambda(c \in \mathrm{Ob}(C)).(\mathrm{id}_c, x) \end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned} \mu^{\mathrm{Flow}}_a &: F_C(F_C a) \to F_C a \\ \mu^{\mathrm{Flow}}_a x &= \lambda c.\,\mathbf{let}\ \ (f, x') = xc \\ &\qquad\quad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (g, x'') = x'(\mathrm{cod}\, u) \\ &\qquad\quad \mathbf{in}\ \ (g \circ f, x'') \end{aligned} \tag{78}$$

で与える。

この定義がモナド則を満たしていることは付録 Aにおいて証明する。

$\mathrm{Flow}(C) = (F_C, \eta^{\mathrm{Flow}}, \mu^{\mathrm{Flow}})$ は、図1のように、圏 C の対象を「位置」、射を「経路」だと考えると理解しやすい。$F_C(a)$ の要素は、すべての位置 c に対して c から出発する経路 f と値 $x \in a$ の組を一つずつ集めたものだと考えられる。

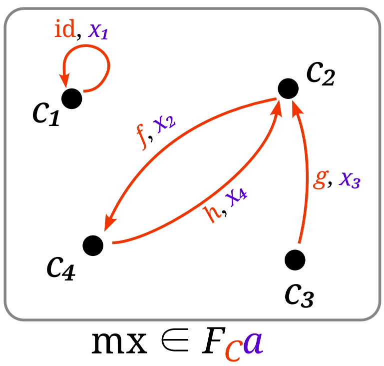


図 1 Flowモナドの概略

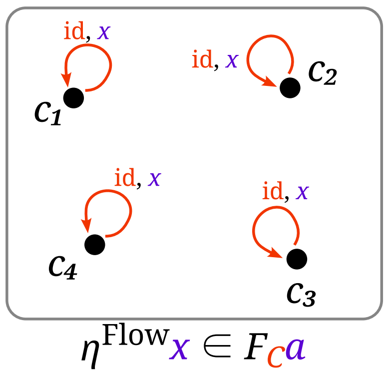
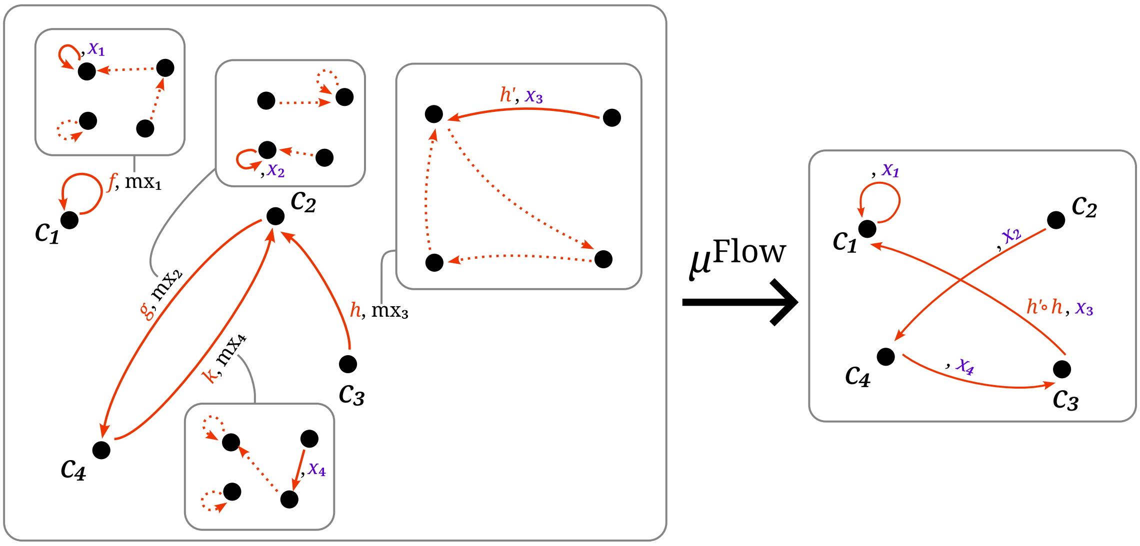


図 2 Flowモナドの単位 η^{Flow}

図2に示すように、モナド単位 $\eta^{\mathrm{Flow}} x$ は各位置 c に対して c から動かないことを表す経路 id_c と x の組を割り当てる。

また、図3のように、$F_C(F_C a)$ の要素 mmx に対するモナド結合 $\mu^{\mathrm{Flow}}\mathrm{mmx}$ は、mmx が各位置 c において割り当てる経路 $f \in C\big[c, c'\big]$ と $\mathrm{mx} \in F_C a$ の組があるとき、mx のうち f の「行き先の位置」c' に割り当てられた組 $(f' \in C\big[c', c''\big], x \in a)$ を選んで、$(f' \circ f, x)$ と

いう 1 ステップに結合している。



$\mathrm{mmx} \in F_C(F_C a)$

図 3 Flowモナドの結合 μ^{Flow}

いくつかの具体的な圏に対して $\mathrm{Flow}(C)$ がどのようなモナドになるかを挙げる。

例 4.28　集合 S 上の離散圏 Disc_S、すなわち S の元を対象とし、射として恒等射 id_s だけをもつ圏を考える。$\mathrm{Flow}(\mathrm{Disc}_S)$ は、関数型プログラミングにおいて `Reader` モナドとして知られるモナドと同型である。

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{Disc}_S}(-) &= \prod_{s \in S} \bigl(\mathrm{Disc}_S[s] \times -\bigr) && (79)\\
&= \prod_{s \in S} \bigl(\{\mathrm{id}_s\} \times -\bigr) && (80)\\
&\sim \prod_{s \in S} (-) && (81)\\
&\sim S \to - && (82)
\end{aligned}
$$

モナドとしての演算も、以下に示す `Reader` モナドの演算と一致する。

$$
\begin{aligned}
&\eta_a : a \to (S \to a) && (83)\\
&\eta_a x = \overline{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_a : \bigl(S \to (S \to a)\bigr) \to (S \to a) && (84)\\
&\mu_a f = \lambda i.fii
\end{aligned}
$$

例 4.29　任意のモノイド $(M, e, \cdot)$ は、単一の対象 $\star$ をもつ圏とみなすことができる。$\mathrm{Flow}(M)$ は、

関数型プログラミングにおいて `Writer` モナドとして知られるモナドと同型である。

$$
\begin{aligned}
F_M(-) &= \prod_{i\in\{\star\}}\big(M[\star]\times -\big) && (85)\\
&= M[\star,\star]\times - && (86)\\
&\sim M\times - && (87)
\end{aligned}
$$

モナドとしての演算も、以下に示す `Writer` モナドの演算と一致する。

$$
\begin{aligned}
&\eta_a : a \to (M\times a) && (88)\\
&\eta_a x = (e,x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_a : \big(M\times (M\times a)\big) \to (M\times a) && (89)\\
&\mu_a(m_1,(m_2,x)) = (m_1\cdot m_2, x)
\end{aligned}
$$

例 4.30　集合 S 上の余離散圏[3] Codisc_S は、対象の集合が S であり、どのホムセットもちょうど 1 つの射だけを持つような圏である。Codisc_S は以下のように具体的に定義される圏と同型である。

$$
\begin{cases}
\mathrm{Ob}(\mathrm{Codisc}_S) & = S\\
\mathrm{Mor}(\mathrm{Codisc}_S) & = S\times S\\
(\mathrm{dom},\mathrm{cod}) & = (\pi_1,\pi_2)\\
\mathrm{id}_s & = (s,s)\\
(t,u)\circ(s,t) & = (s,u)
\end{cases}
\tag{90}
$$

このとき、$\mathrm{Flow}(\mathrm{Codisc}_S)$ は以下の関手を台とするモナドである。

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{Codisc}_S}(-) &= \prod_{s\in S}\big(\mathrm{Codisc}_S[s]\times -\big) && (91)\\
&\sim \prod_{s\in S}(S\times -) && (92)\\
&\sim S\to (S\times -) && (93)
\end{aligned}
$$

これは関数型プログラミングで `State` モナドとして知られるモナドと同型である。

Flow は、小さい圏 C を state-like モナドへ"忠実に"変換する。

定理 4.31　$\mathrm{Flow}(C)$ は state-like モナドでる。具体的に、小さい圏 C に対して以下で定義される $(M, I, e, \bullet, t)$ は $\mathrm{Flow}(C)$ の単純化された標準表示である。

3 codiscrete category

$$
\begin{cases}
M & = \prod_{c \in \mathrm{Ob}(C)} C[c] \\
I & = \mathrm{Ob}(C) \\
e & = \lambda c.\,\mathrm{id}_c \\
m \bullet v & = \lambda c. vc(\mathrm{cod}(mc)) \circ mc \\
t(c, m) & = \mathrm{cod}(mc)
\end{cases}
\tag{94}
$$

Proof. 省略する。 ■

定理 4.32 小さい圏 C, D が同型であるならば、$\mathrm{Flow}(C)$ と $\mathrm{Flow}(D)$ もモナドとして同型である。

Proof.

同型関手 $G : C \to D$ が存在するならば、以下の自然変換 τ_G は $\mathrm{Flow}(C)$ と $\mathrm{Flow}(D)$ の間の自然同型である。

$$
\begin{aligned}
&\tau_G : \mathrm{Flow}(C)(a) \to \mathrm{Flow}(D)(a) \\
&\tau_G f = \lambda(d \in \mathrm{Ob}(D)). \\
&\qquad \mathbf{let}\ \ (u, x) = f(G^{-1}d)\ \ \mathbf{in}\ \ (Gu, x)
\end{aligned}
\tag{95}
$$

■

定理 4.33 $\mathrm{Flow}(C)$ と $\mathrm{Flow}(D)$ がモナドとして同型であるならば、C と D は小さい圏として同型である。

Proof. 4.31の方法で、$\mathrm{Flow}(C)$ が $(M, \mathrm{Ob}(C), e, \bullet, t)$、$\mathrm{Flow}(D)$ が $(M', \mathrm{Ob}(D), e', \bullet', t')$ という単純化された標準表示を持つとする。定理3.26によって、モナド同型 $\tau : \mathrm{Flow}(C) \to \mathrm{Flow}(D)$ の存在から、関数

$$
g : \mathrm{Ob}(D) \to \mathrm{Ob}(C) \tag{96}
$$

$$
h_d : C[gd] \to D[d] \tag{97}
$$

であって、

$$
h_d(e) = e' \tag{98}
$$

$$
\begin{aligned}
g(t'(d, h_d m_c)) &= t(c, m_c) \\
&\mathbf{where}\ \ c = gd
\end{aligned}
\tag{99}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{d_1}(m_{c_1} \bullet \alpha_{c_1} m_{c_2}) &= h_{d_1} m_{c_1} \bullet' \alpha_{d_1}(h_{d_2} m_{c_2}) && (100)\\
\textbf{where}\ \ d_2 &= t'(d_1, h_{d_1} m_{c_1}) && (101)\\
c_1 &= g d_1 \\
c_2 &= g d_2 = t(c_1, m_{c_1})
\end{aligned}
$$

を満たすものが存在する。$(e, \bullet, t)$ や $(e', \bullet', t')$ の定義を展開すると、

$$
\begin{aligned}
h_d(\mathrm{id}_d) &= \mathrm{id}_c && (102)\\
g(\mathrm{cod}(h_d u)) &= \mathrm{cod}\, u && (103)\\
\textbf{where}\ \ u &\in C[gd] \\
h_{d_1}(v \circ u) &= h_{d_2} v \circ h_{d_1} u && (104)\\
\textbf{where}\ \ d_2 &= \mathrm{cod}(h_{d_1} u) && (105)\\
g d_2 &= \mathrm{cod}\, u \\
u &\in C[gd_1, gd_2] \\
v &\in C[gd_2, c_3]
\end{aligned}
$$

となり、τ が同型であることから g, h_d も全単射であることより更に

$$
\begin{aligned}
h_d(\mathrm{id}_d) &= \mathrm{id}_{g^{-1}d} && (106)\\
\mathrm{cod}(h_d u) &= g^{-1}(\mathrm{cod}\, u) && (107)\\
\textbf{where}\ \ d &= g^{-1} c \\
u &\in C[c] \\
h_{d_1}(v \circ u) &= h_{d_2} v \circ h_{d_1} u && (108)\\
\textbf{where}\ \ d_1 &= g^{-1} c_1 && (109)\\
d_2 &= g^{-1} c_2 \\
u &\in C[c_1, c_2] \\
v &\in C[c_2, c_3]
\end{aligned}
$$

であるが、 これは g^{-1} が対象の間の全単射 $\mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$、$h_{g^{-1}c_1}$ が $C[c_1, c_2]$ の射を $D[g^{-1}c_1, g^{-1}c_2]$ へ写す全単射であり、恒等射と合成を保つことを意味している。 これはすなわち、小さい圏の間の同型 $C \to D$ である。 ■

2. State-like モナドを $\mathrm{Flow}(C)$ として表す

定理 4.34　任意の state-like モナド $T = (\mathrm{St}(M, I), \eta, \mu)$ に対して、$\mathrm{Flow}(C)$ が T と同型になるような圏 C が存在する。

Proof.　補題3.19によって、state-like モナド T と同型な標準表示された state-like モナド T' が存在するから、一般性を失うことなく T は標準表示をもつと仮定してよい。T の単純化した標準表示 $(M, I, e, \bullet, t)$ に対して、圏 C を以下のように定義することができる。

$$\begin{cases} \mathrm{Ob}(C) & = I \\ \mathrm{Mor}(C) & = \big\{(i, m_i) \bigm| i \in I, m_i \in M_i\big\} \\ \mathrm{dom}(i, m_i) & = i \\ \mathrm{cod}(i, m_i) & = t(i, m_i) \\ \mathrm{id}_i & = (i, e) \in \mathrm{Mor}(C) \\ (j, m_j) \circ (i, m_i) & = \begin{cases} (i, m_i \bullet \alpha_i m_j) & \text{if } \mathrm{cod}(i, m_i) = \mathrm{dom}(j, m_j) \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases} \tag{110}$$

ここで、射の合成 $(j, m_j) \circ (i, m_i)$ の右辺 $(i, m_i \bullet \alpha_i m_j)$ は、系3.23より $\mathrm{Mor}(C)$ に属す条件を満たしている。

式 (110) で定められる C が実際に圏であるためには、以下の条件をすべて満たしていることも証明しなければならない。

$$\mathrm{dom}((j, m_j) \circ (i, m_i)) = \mathrm{dom}(i, m_i) \tag{i}$$

$$\mathrm{cod}((j, m_j) \circ (i, m_i)) = \mathrm{cod}(j, m_j) \tag{ii}$$

$$(i, m_i) \circ \mathrm{id}_i = (i, m_i) \tag{iii}$$

$$\mathrm{id}_j \circ (i, m_i) = (i, m_i) \tag{iv}$$

$$\big((k, m_k) \circ (j, m_j)\big) \circ (i, m_i) = (k, m_k) \circ \big((j, m_j) \circ (i, m_i)\big) \tag{v}$$

ただし、$m_i \in M_i, m_j \in M_j, m_k \in M_k$ であり、合成がすべて定義されるような i, j, k の組み合わせについてのみ成り立てばよい。

(i) については $\circ$ の定義から明らかである。(iii) と (iv) も定義より直ちにしたがう。(ii) は以下の通り示すことができる。

$$\begin{aligned} \mathrm{cod}((j, m_j) \circ (i, m_i)) &= \mathrm{cod}(i, m_i \bullet \alpha_i m_j) && (111) \\ &= t(i, m_i \bullet \alpha_i m_j) && (112) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= t(t(i,m_i),\alpha_i m_j i) && (113)\\
&= t(j,m_j) && (114)\\
&= \mathrm{cod}(j,m_j) && (115)
\end{aligned}
$$

ただし、合成が定義できるという前提から $\mathrm{cod}(i,m_i) = t(i,m_i) = j$ を用いた。

(v) は以下の通り示すことができる。(v) の両辺は

$$
\begin{aligned}
\big((k,m_k)\circ(j,m_j)\big)\circ(i,m_i) &= (j,m_j \bullet \alpha_j m_j)\circ(i,m_i) && (116)\\
&= (i,m_i \bullet \alpha_i(m_j \bullet \alpha_j m_k)) && (117)\\
(k,m_k)\circ\big((j,m_j)\circ(i,m_i)\big) &= (k,m_k)\circ(i,m_i \bullet \alpha_i m_j) && (118)\\
&= (i,(m_i \bullet \alpha_i m_j)\bullet \alpha_i m_k) && (119)
\end{aligned}
$$

であり、これらは

$$
\begin{aligned}
m_i \bullet \alpha_i(m_j \bullet \alpha_j m_k) &= m_i \bullet \lambda i'. && (120)\\
&\qquad \textbf{if}\ \ l = i\ \ \textbf{then}\ \ m_j \bullet \alpha_j m_k\ \ \textbf{else}\ \ e\\
&= m_i \bullet \lambda i'. && (121)\\
&\qquad \textbf{if}\ \ i' = i\\
&\qquad \textbf{then}\ \ m_j \bullet \lambda j'.\textbf{if}\ \ j' = j\ \ \textbf{then}\ \ m_k\ \ \textbf{else}\ \ e\\
&\qquad \textbf{else}\quad e \bullet \lambda j'.e\\
&= m_i \bullet \lambda l.\alpha_i m_j l \bullet wl && (122)\\
&\qquad \textbf{where}\ \ wi'j' = \begin{cases} m_k & \text{if } i' = i \wedge j' = j\\ e & \text{otherwise}\end{cases}\\
&= (m_i \bullet \alpha_i m_j)\bullet \lambda l.wl(t(l,m_i)) && (123)\\
&= (m_i \bullet \alpha_i m_j)\bullet \alpha_i m_k && (124)
\end{aligned}
$$

より等しい。

ここで定義した圏 C から $\mathrm{Flow}(C) = (F_C, \eta^{\mathrm{Flow}}, \mu^{\mathrm{Flow}})$ として構成される state-like モナドは、もともとの T と同型である。実際、以下の自然変換 φ は $M \sim \prod_{i\in I} M_i$ より同型である。

$$
\begin{aligned}
\varphi_a &: \mathrm{St}(M, I)(a) \to F_C(a) && (125)\\
\varphi_a &: M \times (I \to a) \to \prod_{i \in I} (\{i\} \times M_i) \times a\\
\varphi_a(m, f) &= \lambda(i \in I).((i, p_i m), fi)
\end{aligned}
$$

φ は以下の通りモナド準同型でもあるから、T と $\mathrm{Flow}(C)$ の間のモナド同型である。

$$
\begin{aligned}
\varphi(\eta(x)) &= \varphi(e, \overline{x}) && (126)\\
&= \lambda i.((i, p_i e), x) && (127)\\
&= \lambda i.((i, e), x) && (128)\\
&= \lambda i.(\mathrm{id}_i, x) && (129)\\
&= \eta^{\mathrm{Flow}}(x) && (130)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi \circ \mu)(m, \lambda i.(vi, fi)) &= \varphi(m \bullet v, \lambda i.fi(t(i, m))) && (131)\\
&= \lambda i.((i, p_i(m \bullet v)), fi(t(i, m))) && (132)\\
&\quad \text{補題3.22より}\\
&= \lambda i.\mathbf{let}\ \ m_i = p_i m && (133)\\
&\qquad\qquad\quad j = t(i, m_i)\\
&\qquad\quad \mathbf{in}\ \ ((i, m_i \bullet \alpha_i(p_j(vi))), fij)\\
&= \lambda i.\mathbf{let}\ \ m_i = p_i m && (134)\\
&\qquad\qquad\quad j = t(i, m_i)\\
&\qquad\quad \mathbf{in}\ \ ((j, p_j(vi)) \circ (i, m_i), fij)\\
&= \mathbf{let}\ \ x = \lambda i.((i, p_i m), \lambda j.((j, p_j(vi)), fij)) && (135)\\
&\quad\ \mathbf{in}\ \ \lambda i.\mathbf{let}\ \ ((i, m_i), f) = xi\\
&\qquad\qquad\qquad\quad ((j, m_j), a) = f(\mathrm{cod}(i, m_i))\\
&\qquad\qquad \mathbf{in}\ \ ((j, m_j) \circ (i, m_i), a)\\
&= \mathbf{let}\ \ x = \varphi(m, \lambda i.\lambda j.((j, p_j(vi)), fij)) && (136)\\
&\quad\ \mathbf{in}\ \ \mu^{\mathrm{Flow}}(x)\\
&= \mathbf{let}\ \ x = \varphi(m, \lambda i.\varphi(vi, fi)) && (137)\\
&\quad\ \mathbf{in}\ \ \mu^{\mathrm{Flow}}(x)\\
&= (\mu^{\mathrm{Flow}} \circ \varphi \circ T\varphi)(m, \lambda i.(vi, fi)) && (138)
\end{aligned}
$$

■

第 5 章　状態の数が有限な state-like モナド

1. 状態の数が有限ならば前 state-like モナド =state-like モナド

この節では、前 state-like モナド $T = (\mathrm{St}(M, I), \eta, \mu)$ は、I が有限集合であるならば必ず state-like モナドであることを示す。以下、$T = (\mathrm{St}(M, I), \eta, \mu)$ を任意の前 state-like モナド、$(M, I, e, \bullet, \nwarrow, \nearrow)$ を T の表示とする。

この節を通して、以下の補題を用いる。

補題 5.35　任意の $j \in I, w : I \to I \to M$ に対して、

$$w' \nwarrow_e j = w(u \nwarrow_e j) \nwarrow_e (j \nearrow_e u) \tag{Law7-ee}$$

$$j \nearrow_e w' = (j \nearrow_e u) \nearrow_e w(u \nwarrow_e j) \tag{Law8-ee}$$

$$\begin{aligned} \textbf{where}\quad w'k &= wkk \\ uk &= e \bullet wk \end{aligned}$$

Proof.　(Law7) と (Law8) において $m = e, v = \overline{e}$ を代入すると得られる。■

補題 5.36　I が有限集合であるならば、任意の $i \in I, m_i \in M_i$ に対して $(\alpha_i m_i \nwarrow_e -)$ は全単射である。

Proof.　$\nearrow, \nwarrow$ の引数のうち e と $\alpha_i m_i$ を固定した関数を、$r, s : I \to I$ とおく。

$$rj = \alpha_i m_i \nwarrow_e j \tag{139}$$

$$sj = j \nearrow_e \alpha_i m_i \tag{140}$$

また、α_i のかわりに β_i を代入したものを $\hat{r}, \hat{s}$ とおく。

$$\hat{r}j = \beta_i m_i \nwarrow_e j \tag{141}$$

$$\hat{s}j = j \nearrow_e \beta_i m_i \tag{142}$$

ここで、$\hat{r} = \mathrm{id}$ である。実際、補題3.15より

$$\hat{r}i = \beta_i m_i \nwarrow_e i \tag{143}$$

$$= (\lambda j.p_j(\beta_i m_i j)) \nwarrow_e i \tag{144}$$

$$= (\lambda j.\,\mathbf{if}\ \ i = j\ \ \mathbf{then}\ \ p_j e\ \ \mathbf{else}\ \ p_j m_i) \nwarrow_e i \tag{145}$$

$$= (\lambda j.e) \nwarrow_e i \tag{146}$$

$$= i \tag{147}$$

となる。

証明すべきことは r が I 上の全単射であることだった。そこで、モナド則によって関数 $r, s, \hat{s}$ が受ける制約を求めるために、式 (Law7-ee) に以下の w を代入する。

$$w := \lambda j.\,\mathbf{if}\ \ i = j\ \ \mathbf{then}\ \ \overline{e}\ \ \mathbf{else}\ \ \alpha_i m_i$$

すると

$$\begin{aligned} w'k &= wkk = e \\ uk &= e \bullet w(k) \\ &= \mathbf{if}\ \ i = k\ \ \mathbf{then}\ \ e \bullet \overline{e}\ \ \mathbf{else}\ \ e \bullet \alpha_i m_i \\ &= \mathbf{if}\ \ i = k\ \ \mathbf{then}\ \ e\ \ \mathbf{else}\ \ m_i \\ &= \beta_i m_i k \end{aligned} \tag{148}$$

より

$$w' \nwarrow_e j = w(u \nwarrow_e j) \nwarrow_e (j \nearrow_e u) \tag{149}$$

$$\overline{e} \nwarrow_e j = w(\beta_i m_i \nwarrow_e j) \nwarrow_e (j \nearrow_e \beta_i m_i) \tag{150}$$

$$j = w(\hat{r}j) \nwarrow_e (\hat{s}j) \tag{151}$$

$$= w(j) \nwarrow_e (\hat{s}j) \tag{152}$$

$$= (\mathbf{if}\ \ i = j\ \ \mathbf{then}\ \ \overline{e}\ \ \mathbf{else}\ \ \alpha_i m_i) \nwarrow_e (\hat{s}j) \tag{153}$$

$$= \begin{cases} \hat{s}i & (i = j) \\ r(\hat{s}j) & (i \neq j) \end{cases} \tag{154}$$

が得られる。すなわち、

$$i = \hat{s}i \tag{155}$$

$$(i \neq j) \implies j = r(\hat{s}j) \tag{156}$$

である。よって、$I \setminus \{i\} \subset \operatorname{im} r$ がわかる。

ここで、$i \in \operatorname{im} r$ であるならば r は全射 $I \to I$ であり、I が有限集合であるから r は全単射でなければならないことに注目する。

$i \notin \operatorname{im} r$ であると仮定して矛盾を導く。まず、次の w を式 (Law7-ee) に代入する。

$$w := \lambda j.\,\textbf{if}\ \ i = j\ \ \textbf{then}\ \ \alpha_i m_i\ \ \textbf{else}\ \ \overline{e}$$

すると

$$\begin{aligned} w'k &= wkk = \alpha_i m_i k && (157)\\ uk &= e \bullet w(k) \\ &= \textbf{if}\ \ i = k\ \ \textbf{then}\ \ e \bullet \alpha_i m_i\ \ \textbf{else}\ \ e \bullet \overline{e} \\ &= \textbf{if}\ \ i = k\ \ \textbf{then}\ \ m_i\ \ \textbf{else}\ \ e \\ &= \alpha_i m_i k && (158) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} w' \nwarrow_e j &= w(u \nwarrow_e j) \nwarrow_e (j \nearrow_e u) && (159)\\ \alpha_i \nwarrow_e j &= w(\alpha_i m_i \nwarrow_e j) \nwarrow_e (j \nearrow_e \alpha_i m_i) && (160)\\ rj &= w(rj) \nwarrow_e sj && (161)\\ &= (\textbf{if}\ \ i = rj\ \ \textbf{then}\ \ \overline{\alpha_i m_i}\ \ \textbf{else}\ \ \overline{e}) \nwarrow_e sj && (162)\\ &\text{仮定より } i \neq rj \text{ なので} \\ &= \overline{e} \nwarrow_e sj && (163)\\ &= sj && (164) \end{aligned}$$

すなわち $r = s$ がわかる。また別の値 w を (Law8-ee) に代入する。

$$w := \lambda j.\,\textbf{if}\ \ i = j\ \ \textbf{then}\ \ \alpha_i m_i\ \ \textbf{else}\ \ \beta_i m_i$$

すると

$$\begin{aligned} w'k &= wkk = m_i && (165)\\ uk &= e \bullet w(k) \\ &= \textbf{if}\ \ i = k\ \ \textbf{then}\ \ e \bullet \alpha_i m_i\ \ \textbf{else}\ \ e \bullet \beta_i m_i \\ &= \textbf{if}\ \ i = k\ \ \textbf{then}\ \ m_i\ \ \textbf{else}\ \ e \\ &= \alpha_i m_i k && (166) \end{aligned}$$

より

$$j \nearrow_e w' = (j \nearrow_e u) \nearrow_e w(u \nwarrow_e j) \tag{167}$$

$$
\begin{aligned}
j \nearrow_e \overline{m_i} &= (j \nearrow_e \alpha_i m_i) \nearrow_e w(\alpha_i m_i \nwarrow_e j) && \text{(168)} \\
j &= sj \nearrow_e w(rj) && \text{(169)} \\
&= sj \nearrow_e (\textbf{if}\ \ i = rj\ \ \textbf{then}\ \ \alpha_i m_i\ \ \textbf{else}\ \ \beta_i m_i) && \text{(170)} \\
&\text{仮定より } i \neq rj \text{ なので} \\
&= sj \nearrow_e \beta_i m_i && \text{(171)} \\
&= \hat{s}(sj) && \text{(172)}
\end{aligned}
$$

すなわち $\hat{s} \circ s = \mathrm{id}$ である。I が有限集合であるから、このような $\hat{s}, s$ は必ず全単射であり、$r = s$ であるから r も全単射でなければならないが、これは $i \notin \mathrm{im}\, r$ とした仮定に反する。

したがって、$i \in \mathrm{im}\, r$ でなければならず、前半の議論から r は全単射である。 ■

定理 5.37 I が有限集合であるならば、前 state-like モナド $T = (\mathrm{St}(M, I), \eta, \mu)$ は state-like モナドでもある。

Proof. 前節の補題3.15より、任意の $v \in \prod_i M_i$ において $\left(v \nwarrow_e -\right)$ が全単射であることを示せば十分である。

$w := w_A = \lambda i.\alpha_i(vi)$ に対して (Law7-ee) を適用することで、以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
w' \nwarrow_e j &= w_A(u \nwarrow_e j) \nwarrow_e (j \nearrow_e u) && \text{(173)} \\
&\qquad \textbf{where}\ \ w'k = w_A kk = vk && \text{(174)} \\
&\qquad \phantom{\textbf{where}\ \ } uk = e \bullet w_A k = e \bullet \alpha_k(vk) = p_k(vk) = vk \\
v \nwarrow_e j &= w_A(v \nwarrow_e j) \nwarrow_e (j \nearrow_e v) && \text{(175)} \\
&= \sigma_{v \nwarrow_e j}(j \nearrow_e v) && \text{(176)} \\
&\qquad \textbf{where}\ \ \sigma_k = (w_A k \nwarrow_e -) = (\alpha_k(vk) \nwarrow_e -) \\
\sigma^{-1}_{v \nwarrow_e j}(v \nwarrow_e j) &= j \nearrow_e v && \text{(177)}
\end{aligned}
$$

ただし、補題5.36から任意の k において σ_k は全単射であり、逆関数 σ_k^{-1} が存在することを用いた。

ここで更に $m = e \bullet v$ とおき、$w := w_B = \lambda i.\alpha_i m$ に対して (Law8-ee) を適用すると、

$$
j \nearrow_e w' = (j \nearrow_e u) \nearrow_e w_B(u \nwarrow_e j) \tag{178}
$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{where}\quad & w'k = w_B kk = m \qquad (179)\\
& uk = e \bullet w_B k = e \bullet \alpha_k m = p_k m = vk
\end{aligned}
$$

$$j \nearrow_e \overline{m} = (j \nearrow_e v) \nearrow_e w_B(v \nwarrow_e j) \qquad (180)$$

$$j = \sigma^{-1}_{v \nwarrow_e j}(v \nwarrow_e j) \nearrow_e w_B(v \nwarrow_e j) \qquad (181)$$

$$= q(v \nwarrow_e j) \qquad (182)$$

$$\textbf{where}\quad qk = \sigma^{-1}_k k \nearrow_e w_B(k) \qquad (183)$$

より、$q \circ (v \nwarrow_e -) = \mathrm{id}$ である。I が有限集合であるため、このような q と $v \nwarrow_e -$ は互いに逆関数でなければならず、$v \nwarrow_e -$ は全単射である。

■

状態の数が有限である、という条件がなければ、前 state-like モナドであって state-like モナドでないようなものが存在する。

例 5.38 `Maybe` モナド $P = ((1 + (-)), \eta^P, \mu^P)$ と、自然数 $\mathbb{N}$ からの関数 $(\mathbb{N} \to -)$ を台とする `Reader` モナド $R = ((\mathbb{N} \to -), \eta^R, \mu^R)$ に対して、それらの直積モナド $P \times R = (F, \eta, \mu)$ を考える。

$$
\begin{aligned}
& F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set} \qquad (184)\\
& F(a) = (1 + a) \times (\mathbb{N} \to a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \eta_a : a \to F(a) \qquad (185)\\
& \eta_a x = (\eta^P_a x, \eta^R_a x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \mu_a : F(F(a)) \to F(a) \qquad (186)\\
& \mu_a(p, r) = (\mu^P_a(P\pi_1(p)), \mu^R_a(R\pi_2(r)))
\end{aligned}
$$

モナド $P \times R$ は以下のように前 state-like モナドであるが、state-like モナドではない。

$$
\begin{aligned}
F(a) &= (1 + a) \times (\mathbb{N} \to a) && (187)\\
&\sim (\mathbb{N} \to a) + a \times (\mathbb{N} \to a) && (188)\\
&\sim (\mathbb{N} \to a) + ((1 + \mathbb{N}) \to a) && (189)\\
&\sim (\mathbb{N} \to a) + (\mathbb{N} \to a) && (190)\\
&\sim \{0, 1\} \times (\mathbb{N} \to a) && (191)
\end{aligned}
$$

2. モナド $(\mathrm{St}(M,I),\eta,\mu)$ の数え上げ

前節の結果5.37より、I が有限集合であるときに $\mathrm{St}(M,I)$ を台とするモナドはいずれも state-like モナドである。それらは第 4 章で示したように $\mathrm{Ob}(C)=I$ であるような小さい圏 C と 1 対 1 に対応する。したがって、「与えられた関手 $\mathrm{St}(M,I)$ を台とするモナドの同型類をすべて列挙せよ」という問題は、「$\left|\mathrm{Ob}(C)\right| = \left|I\right|$ かつ $\left|\prod_i C[i]\right| = \left|M\right|$ であるような圏 C の同型類をすべて列挙せよ」と言い換えることができる。

サイズの小さい例として、$\left|M\right| = 2, \left|I\right| = 2$ の場合を考える。I の要素のラベルを $I=\{1,2\}$ とすると、

$$\left|M\right| = \left|\prod_i C[i]\right| = \left|C[1]\right| \times \left|C[2]\right| = 2 \tag{192}$$

であるから、$C[1], C[2]$ の片方が 2 つの射をもち、もう片方は単元集合である。I のラベルを付け替える同型をとることで、一般性を失うことなく $\left|C[1]\right| = 2$ としてよい。$C[i]$ は必ず id_i を要素に含むため、

$$\begin{aligned} C[1] &= \{\mathrm{id}_1, f\} \\ C[2] &= \{\mathrm{id}_2\} \end{aligned} \tag{193}$$

である。このような圏は図4に示した 3 つに限られる。したがって、$\left|M\right| = 2, \left|I\right| = 2$ であるとき、$\mathrm{St}(M,I)$ を台とするモナドは同型を除いて 3 つである。

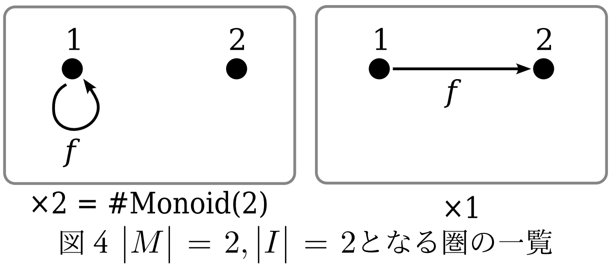


図 4 $\left|M\right| = 2, \left|I\right| = 2$となる圏の一覧

図5は、$\left|M\right| = 3, \left|I\right| = 3$ であるときに、対応する 11 個の圏をすべて列挙したものに

なっている。

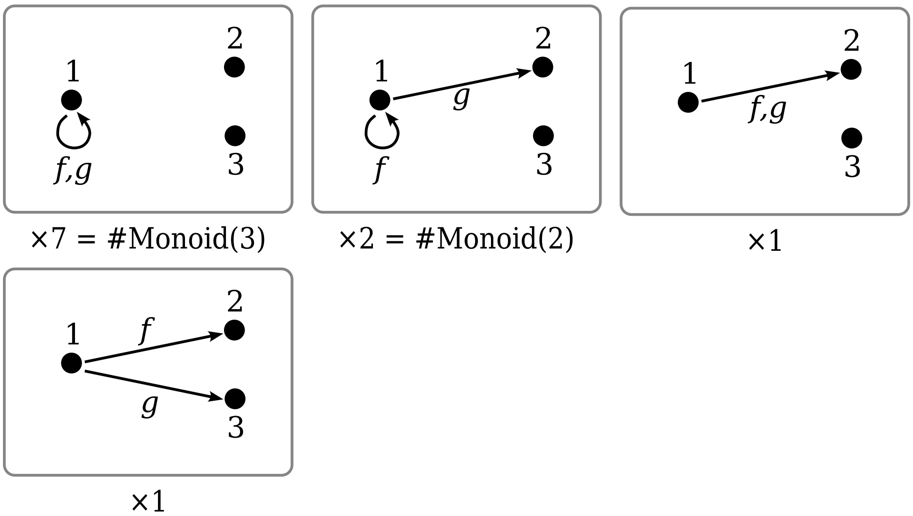


図 5 $\left|M\right| = 3, \left|I\right| = 3$となる圏の一覧

一般に、次のことがいえる。

定義 5.39　自然数 m に対して m 個の要素をもつ集合を $[m]$ と表記するとき、関数 $\#T(m,n)$ を $\mathrm{St}([m],[n])$ を台とするモナドの同型類の数と定義する。

定理 5.40　$n > m$ ならば $\#T(m,n) = \#T(m,m)$

Proof.　$\#T(m,n)$ は $\left|\mathrm{Ob}(C)\right| = n$ かつ $\left|\prod_i C[i]\right| = m$ であるような圏 C の同型類の数でもある。

圏 C の対象 i を始域とする射の数を $m_i = \left|C[i]\right|$ とおく。このとき、$m = \prod_i m_i$ である。

F を圏 C の恒等射でない射の集合とする。F に含まれるいずれかの射の dom や cod である対象の数 n_F は m を超えない。

$$
\begin{aligned}
n_F &= \left|\{\mathrm{dom}\, f \mid f \in F\} \cup \{\mathrm{cod}\, f \mid f \in F\}\right| && (194)\\
&\leq \left|\{\mathrm{dom}\, f \mid f \in F\}\right| + \left|\{\mathrm{cod}\, f \mid f \in F\}\right| && (195)\\
&\leq \left|\{i \mid i \in \mathrm{Ob}(C), m_i > 1\}\right| + \left(\sum_{i \in \mathrm{Ob}(C)} (m_i - 1)\right) && (196)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i \in \mathrm{Ob}(C), m_i > 1} m_i \tag{197}$$

$$\leq \prod_{i \in \mathrm{Ob}(C)} m_i \tag{198}$$

$$= m \tag{199}$$

すなわち、C において高々 m 個の対象以外は、それ自身への恒等射以外の射と関係しない孤立した対象である。よって、$n > m$ であるような圏 C は $\left|\mathrm{Ob}(C')\right| = m$ であるような別の圏 C' に $n - m$ 個の対象と恒等射を加えた圏と同型である。

したがって、$n > m$ ならば $\#T(m,n) = \#T(m,m)$ である。 ■

参考文献

[1] Tarmo Uustalu, "Container Combinatorics: Monads and Lax Monoidal Functors," in *Topics in Theoretical Computer Science*, Mousavi, Mohammad Reza and Sgall, Jiří, Eds., Cham: Springer International Publishing, 2017, pp. 91–91, doi:10.1007/978-3-319-68953-1_8.

[2] Danel Ahman and Tarmo Uustalu, "Directed Containers as Categories," *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pp. 89–89, vol. 207, no. 3, April 2016, Ahman_2016.

[3] Nelson Niu and David I. Spivak, "Polynomial Functors: A Mathematical Theory of Interaction," webpage, 2021-2024, URL: https://github.com/ToposInstitute/poly/blob/pdf/poly-book.pdf.

[4] Nicola Gambino and Joachim Kock, "Polynomial functors and polynomial monads," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, pp. 153–153, vol. 154, no. 1, Sep. 2012, doi:10.1017/s0305004112000394.

付録 A　省略した証明群

Proof of 定理*3.13.*　以下の通り計算すると得られる。

$$p_i(p_j m) = e \bullet \alpha_i\left(e \bullet \alpha_j m\right) \tag{200}$$

$$= e \bullet \lambda k.\,\mathbf{if}\ \ i = k\ \ \mathbf{then}\ \ e \bullet \alpha_j m\ \ \mathbf{else}\ \ e \tag{201}$$

$$
\begin{aligned}
&= e \bullet \lambda k. \\
&\qquad \mathbf{if}\ \ i = k \\
&\qquad \mathbf{then}\ \ e \bullet \alpha_j m \\
&\qquad \mathbf{else}\ \ \ e \bullet \overline{e}
\end{aligned} \tag{202}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e \bullet \lambda k. \\
&\qquad e \bullet \lambda l. \\
&\qquad\qquad \mathbf{if}\ \ i = k \\
&\qquad\qquad \mathbf{then}\ \ \alpha_j ml \\
&\qquad\qquad \mathbf{else}\ \ \ e
\end{aligned} \tag{203}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e \bullet \lambda k. \\
&\qquad \mathbf{if}\ \ i = k \\
&\qquad \mathbf{then}\ \ \alpha_j mk \\
&\qquad \mathbf{else}\ \ \ e
\end{aligned} \tag{204}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e \bullet \lambda k. \\
&\qquad \mathbf{if}\ \ i = k \land j = k\ \ \mathbf{then}\ \ m\ \ \mathbf{else}\ \ e
\end{aligned} \tag{205}
$$

$$
= \begin{cases} p_i m & \text{if } i = j \\ e & \text{otherwise} \end{cases} \tag{206}
$$

■

Proof of 定理*3.26.* τ は自然変換 $\mathrm{St}(M,I) \to \mathrm{St}(M',I')$ であるから、関数 τ_0,τ_1 によって以下のように書くことができる。

$$
\begin{aligned}
\tau(m,f) &= (\tau_0 m, f \circ \tau_1 m) \\
\mathbf{where}\quad & \tau_0 : M \to M' \\
& \tau_1 : M \to I' \to I
\end{aligned} \tag{207}
$$

τ はモナド準同型でもあるから、モナド単位を保つという条件から

$$
\tau(\eta x) = \eta' x \tag{208}
$$

$$
(\tau_0 e, \overline{x}) = (e', \overline{x}) \tag{209}
$$

がわかる。また、τ はモナド結合 μ を保つという条件から、

$$
\tau(\mu(m, \lambda i.(vi, fi))) = \mu'(\tau(m, \lambda i.\tau(vi, fi))) \tag{210}
$$

である。ここで $m := e, v := \overline{m}, fij := i$ を代入すると、

$$\tau(\mu(e, \lambda i.(m, \bar{i}))) = \mu'(\tau(e, \lambda i.\tau(m, \bar{i}))) \tag{211}$$
$$\tau(v_0, \mathrm{id}) = \mu'(e', \lambda i'.(\tau_0 m, \overline{\tau_1 e i'})) \tag{212}$$
$$(\tau_0 m, \tau_1 m) = (\tau_0 m, \tau_1 e) \tag{213}$$

がわかる。第 2 成分の比較から、$g = \tau_1 e : I' \to I$ とおくと、任意の m について

$$\tau_1 m = g \tag{214}$$

となる。これを用いて式 (210) を展開すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\tau(\mu(m, \lambda i.(vi, fi))) &= \mu'(\tau(m, \lambda i.\tau(vi, fi))) \\
\tau(m \bullet v, \lambda i.fi(t(i, m))) &= \mu'((\tau_0 m, \lambda i'.\tau(v(gi'), f(gi')))) \qquad (215) \\
&= \mu'((\tau_0 m, \lambda i'.(\tau_0 v(gi'), f(gi') \circ g))) \qquad (216) \\
(\tau_0(m \bullet v), \lambda i'.f(gi')(t(gi', m))) &= (\tau_0 m \bullet' \tau_0 \circ v \circ g, \lambda i'.f(gi')(g(t'(i', \tau_0 m)))) \qquad (217)
\end{aligned}$$

両辺の比較から、

$$\tau_0(m \bullet v) = \tau_0 m \bullet' \tau_0 \circ v \circ g \tag{218}$$
$$t(gi', m) = g(t'(i', \tau_0 m)) \tag{219}$$

がわかる。ここで、$h_{i'} : M_{gi'} \to M'_{i'}$ を

$$\begin{aligned}
h_{i'} m_{gi'} &= p'_{i'}(\tau_0 m_{gi'}) \qquad (220) \\
\textbf{where} \;\; p'_{i'} m' &= e' \bullet' \alpha_{i'} m'
\end{aligned}$$

と定義すると、これは式 (75) を満たす。実際、

$$\begin{aligned}
\tau_0 m &= \tau_0(e \bullet \lambda i.p_i m) \qquad (221) \\
&= \tau_0 e \bullet \tau_0 \circ (\lambda i.p_i m) \circ g \qquad (222) \\
&= e' \bullet \lambda i'.\tau_0(p_{gi'} m) \qquad (223) \\
&= e' \bullet \lambda i'.p'_{i'}(\tau_0(p_{gi'} m)) \qquad (224) \\
&= e' \bullet \lambda i'.h_{i'}(p_{gi'} m) \qquad (225)
\end{aligned}$$

が成り立つため、式 (75) の右辺は式 (207) の右辺と一致する。

さらにこれは式 (72)-(74) も満足する。

$$\begin{aligned} h_{i'}e &= p'_{i'}(\tau_0 e) = e' && (226)\\ g(t'(i', h_{i'}m_i)) &= g(t'(i', p'_{i'}(\tau_0 m_i))) && (227)\\ &= g(t'(i', \tau_0 m_i)) && (228)\\ &= t(i, m_i) && (229)\\ &\quad \textbf{where} \quad i = gi' \\ h_{i'}(m_i \bullet \alpha_i m_j) &= p'_{i'}(\tau_0(m_i \bullet \alpha_i m_j)) && (230)\\ &= p'_{i'}(\tau_0 m_i \bullet' \tau_0 \circ \alpha_i m_j \circ g) && (231)\\ &= p'_{i'}(\tau_0 m_i) \bullet' \alpha_{i'}(p'_{j'}(\tau_0(\alpha_i m_j(gi')))) && (232)\\ &= p'_{i'}(\tau_0 m_i) \bullet' \alpha_{i'}(p'_{j'}(\tau_0 m_j)) && (233)\\ &= h_{i'}m_i \bullet' \alpha_{i'}(h_{j'}m_j) && (234)\\ &\quad \textbf{where} \quad j' = t'(i', h_{i'}m_i) \\ &\quad \phantom{\textbf{where}} \quad i = gi' \\ &\quad \phantom{\textbf{where}} \quad j = gj' = t(i, m_i) \end{aligned}$$

■

Proof. 定義4.27で定義した $\mathrm{Flow}(C)$ のモナド則を示す。

$$\begin{aligned} \mu^{\mathrm{Flow}} \circ \eta^{\mathrm{Flow}} &= \mathrm{id} && (235)\\ \mu^{\mathrm{Flow}} \circ F_C \eta^{\mathrm{Flow}} &= \mathrm{id} && (236)\\ \mu^{\mathrm{Flow}} \circ \mu^{\mathrm{Flow}} &= \mu^{\mathrm{Flow}} \circ F_C \mu^{\mathrm{Flow}} && (237) \end{aligned}$$

それぞれ、(235) が

$$\begin{aligned} \mu^{\mathrm{Flow}}(\eta^{\mathrm{Flow}} f) &= \mu^{\mathrm{Flow}}(\lambda c.(\mathrm{id}_c, f)) && (238)\\ &= \lambda c.\,\textbf{let} \ \ (u, g) = (\lambda c'.(\mathrm{id}_{c'}, \overline{f}))c && (239)\\ &\qquad \textbf{in} \ \ \textbf{let} \ \ (v, x) = g(\mathrm{cod}\, u) \\ &\qquad \textbf{in} \ \ (v \circ u, x) \\ &= \lambda c.\,\textbf{let} \ \ (v, x) = f(\mathrm{cod}\,\mathrm{id}_c) && (240)\\ &\qquad \textbf{in} \ \ (v \circ \mathrm{id}_c, x) \\ &= \lambda c.\,\textbf{let} \ \ (v, x) = fc \ \ \textbf{in} \ \ (v \circ \mathrm{id}_c, x) && (241) \end{aligned}$$

$$= f \tag{242}$$

(236) が

$$\begin{aligned}\mu^{\mathrm{Flow}}(F_C\eta^{\mathrm{Flow}} f) &= \lambda c.\,\mathbf{let}\ \ (u,g) = (F_C\eta^{\mathrm{Flow}} f)c \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (v,x) = g(\mathrm{cod}\,u) \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ (v\circ u, x)\end{aligned} \tag{243}$$

$$\begin{aligned}&= \lambda c.\,\mathbf{let}\ \ (u,x') = fc \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (v,x) = (\lambda c'.(\mathrm{id}_{c'}, \overline{x'}))(\mathrm{cod}\,u) \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ (v\circ u, x)\end{aligned} \tag{244}$$

$$= \lambda c.\,\mathbf{let}\ \ (u,x') = fc\ \ \mathbf{in}\ \ (\mathrm{id}_{\mathrm{cod}\,u}\circ u, x') \tag{245}$$

$$= f \tag{246}$$

(237) が

$$\begin{aligned}\mu^{\mathrm{Flow}}(\mu^{\mathrm{Flow}} f) &= \lambda c.\,\mathbf{let}\ \ (u,g) = \mu^{\mathrm{Flow}} fc \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (v,x) = g(\mathrm{cod}\,u) \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ (v\circ u, x)\end{aligned} \tag{247}$$

$$\begin{aligned}&= \lambda c.\,\mathbf{let}\ \ (u',g') = fc \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (v',h') = g'(\mathrm{cod}\,u') \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (u,g) = (v'\circ u', h') \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (v,x) = g(\mathrm{cod}\,u) \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ (v\circ u, x)\end{aligned} \tag{248}$$

$$\begin{aligned}&= \lambda c.\,\mathbf{let}\ \ (u,g) = fc \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (v,h) = g(\mathrm{cod}\,u) \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (w,x) = h(\mathrm{cod}(v\circ u)) \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ (w\circ(v\circ u), x)\end{aligned} \tag{249}$$

$$\begin{aligned}\mu^{\mathrm{Flow}}(F_C\mu^{\mathrm{Flow}} f) &= \lambda c.\,\mathbf{let}\ \ (u,g) = F_C\mu^{\mathrm{Flow}} fc \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (v,x) = g(\mathrm{cod}\,u) \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ (v\circ u, x)\end{aligned} \tag{250}$$

$$\begin{aligned}&= \lambda c.\,\mathbf{let}\ \ (u,g) = fc \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (v,x) = \mu_F g(\mathrm{cod}\,u) \\ &\qquad \mathbf{in}\ \ (v\circ u, x)\end{aligned} \tag{251}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda c.\,\mathbf{let}\ \ (u,g) = fc \\
&\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (u',h') = g(\operatorname{cod} u) \\
&\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (v',x') = h'(\operatorname{cod} u') \\
&\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (v,x) = (v' \circ u', x') \\
&\qquad \mathbf{in}\ \ (v \circ u, x)
\end{aligned} \tag{252}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda c.\,\mathbf{let}\ \ (u,g) = fc \\
&\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (v,h) = g(\operatorname{cod} u) \\
&\qquad \mathbf{in}\ \ \mathbf{let}\ \ (w,x) = h(\operatorname{cod} v) \\
&\qquad \mathbf{in}\ \ ((w \circ v) \circ u, x)
\end{aligned} \tag{253}
$$

として成り立つことが確認できる。 ■

付録 B　$\left|M\right| = 4, \left|I\right| = 3$ となる圏の一覧

図4や図5と同様に、$\left|M\right| = 4, \left|I\right| = 3$ となるすべての圏を図6に示す。

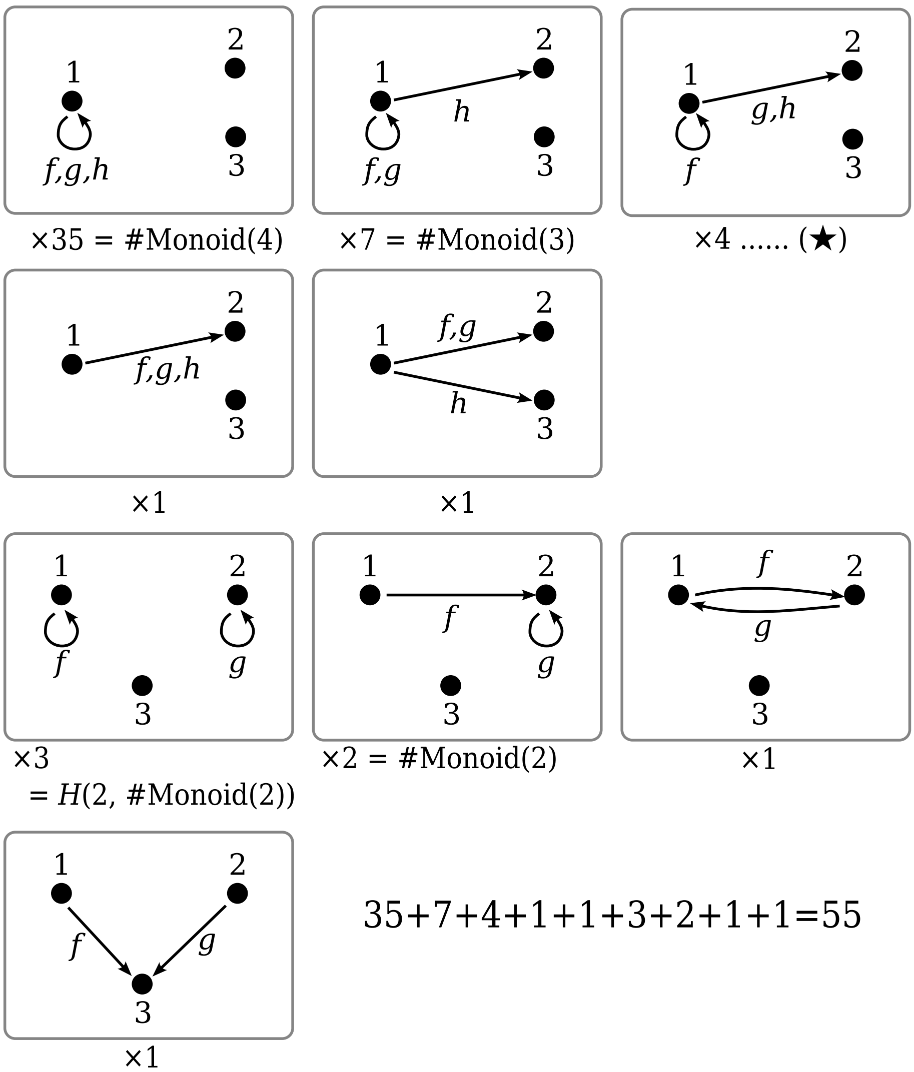


図 6 $\left|M\right| = 4, \left|I\right| = 3$となる圏の一覧

図中の $H(n, k)$ は重複組み合わせである。 また、$(\star)$ で示した箇所の形の圏が同型を除いてちょうど 4 つであることは以下のように説明できる。

まず、 この形をした圏の射の結合演算として自明でない部分は、 以下の 2 つのケースに限られる。

$$(- \circ -) : \{\mathrm{id}, f\} \to \{\mathrm{id}, f\} \to \{\mathrm{id}, f\} \tag{254}$$

$$(- \circ -) : \{g, h\} \to \{\mathrm{id}, f\} \to \{g, h\} \tag{255}$$

射の合成 $\circ$ の単位則と結合則より、これらの演算は $N_1 = \{\mathrm{id}, f\}$ 上のモノイドおよび $\{\mathrm{id}, f\}$ の 2 元集合 $\{g, f\}$ への右作用となっている。N_1 上のモノイドは 2 つであり、それぞれ

- $f \circ f = \mathrm{id}$ であるもの
- $f \circ f = f$ であるもの

が存在する。更に、それらが 2 元集合に作用する方法は、

- $f \circ f = \mathrm{id}$ のとき以下のいずれか
  - 自明な作用
  - f が 2 つの元の互換として作用
- $f \circ f = f$ のとき以下のいずれか
  - 自明な作用
  - f が定数写像として作用

の合計 4 通りであり、これが $(\star)$ で示した箇所の形の 4 種類の圏に対応する。